www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Durée : 4 heures

Le symbole $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ représente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$, la convergence de $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ signifiant la convergence de chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$.

Les notations définies dans une question ou en préambule d'une partie sont conservées pour les questions suivantes.

I

1. Soit $\chi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\chi(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.
Montrer que χ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

2. En déduire l'existence d'une fonction θ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in]1/2, 2[\ \theta(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \notin]1/2, 2[\ \theta(x) = 0 .$$

3. Montrer que l'on peut définir une fonction Φ sur $]0, \infty[$ par $\Phi(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \theta(2^{-j}x)$,

que Φ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et que $\forall x > 0 \quad \Phi(x) > 0$.

On pose $$\forall x \neq 0 \ \varphi(x) = \frac{\theta(|x|)}{\Phi(|x|)} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 0 .$$

Montrer que la fonction φ a les propriétés suivantes:

i) φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

ii) $\varphi(x) > 0$ si $1/2 < |x| < 2$ et $\varphi(x) = 0$ sinon.

iii) $$\forall x \in \mathbf{R} \ \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^{-j}x) \leq 1 ,$$ l'égalité ayant lieu pour $|x| \geq 1$.

II

On note E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, et, pour $f \in E$ et $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx .$$

1. Soit φ la fonction définie en I3. On pose, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{ix\xi}dx$.

Montrer que ψ est continue et que l'intégrale $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi||\psi(\xi)|d\xi$$

est convergente. (Pour ce dernier point, on pourra commencer par exprimer $\xi^3\psi(\xi)$ sous forme d'une intégrale).

2. Soit $N > 0$ et $t \in \mathbf{R}$. On définit, pour $x \in \mathbf{R}$, $L(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi\left(\frac{(2\pi)^{-1}x + k}{N}\right) e^{i((2\pi)^{-1}x+k)t}$.

(a) Montrer que L est une fonction de classe C^∞ et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$.

(b) Exprimer, pour $n \in \mathbf{Z}$, $\hat{L}(n)$ au moyen de la fonction ψ.

(c) En déduire $$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} = N\sum_{k\in\mathbf{Z}} \psi(N(t + 2\pi k)) .$$

Pour la suite du problème on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$, $\psi_n(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(2^{-n}k)e^{ikt}$.

3. Soit $h \in E$ tel qu'il existe α, $0 < \alpha \leq 1$, et $M \geq 0$ avec $\forall t \in \mathbf{R} \ |h(t)| \leq M|t|^\alpha$.

Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}$, $$\int_0^{2\pi} |h(t)||\psi_n(t)|dt \leq M2^{-\alpha n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^\alpha|\psi(\xi)|d\xi .$$

Tournez la page S.V.P.

III

On définit les normes $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur E par

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [0, 2\pi]\} .$$

Si $f, g \in E$ on note

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt .$$

Pour $N \in \mathbf{N}$, on désigne par E_N le sous-espace de E engendré par les fonctions e_k avec $k \in \mathbf{Z}$ et $|k| \leq N$, où, pour $k \in \mathbf{Z}$, on pose $e_k(x) = e^{ikx}$.

1. Montrer que, si $f, g \in E$, $f \star g = g \star f$.

2. Soit $f \in E$ et $n \in \mathbf{N}$. Exprimer $f \star \psi_n$ en fonction des coefficients $\hat{f}(k)$ et montrer que $f \star \psi_n \in E_{2^{n+1}}$.

3. Si $f \in E$ et $r \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_r = \hat{f}(0) + \sum_{n=0}^{r} f \star \psi_n .$$

(a) Montrer

$$\forall f \in E \ \forall k \in \mathbf{Z} \quad |\hat{f}_r(k)| \leq |\hat{f}(k)| .$$

En déduire

$$\forall f \in E \quad \|f_r\|_2 \leq \|f\|_2 .$$

(b) Montrer que, si $N \in \mathbf{N}$ $r \in \mathbf{N}$ et $2^r \geq N$,

$$\forall f \in E_N \quad f_r = f .$$

(c) Montrer que, pour tout f de E,

$$\lim_{r\to\infty} \|f_r - f\|_2 = 0$$

(on pourra faire intervenir les sommes partielles $S_N f$ de la série de Fourier de f).

IV

Pour $0 < \alpha \leq 1$, Λ^α désigne le sous-espace de E constitué des fonctions f pour lesquelles

$$\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x) - f(y)||x - y|^{-\alpha}; x, y \in \mathbf{R} \text{ et } x \neq y\}$$

est fini.
On suppose dans la suite α fixé, $0 < \alpha \leq 1$.

1. Montrer qu'il existe un réel $H > 0$ tel que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha \ \forall n \in \mathbf{N} \quad \|f \star \psi_n\|_\infty \leq H\|f\|_\alpha 2^{-\alpha n} .$$

En déduire que, si $f \in \Lambda^\alpha$, f_r converge uniformément vers f quand r tend vers l'infini.

2. Etablir que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha \ \forall r \in \mathbf{N} \quad \|f_r - f\|_\infty \leq H\|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}$$

et en déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha \ \forall N \in \mathbf{N} \quad d(f, E_N) \leq C\|f\|_\alpha N^{-\alpha}$$

où $d(f, E_N)$ désigne $\inf\{\|f - g\|_\infty; g \in E_N\}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail